

## 공학수학 에센스

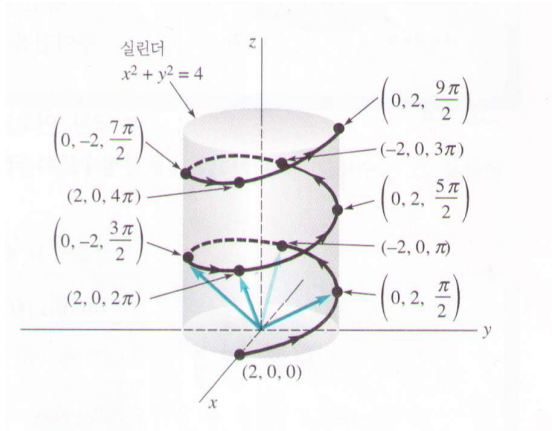
### 연습문제 풀이 이용 안내

- 본 문제 풀이의 저작권은 마인속과 한빛아카데미(주)에 있습니다.
- 이 자료를 무단으로 전제하거나 배포할 경우 저작권법 136조에 의거하여 최고 5년 이하의 징역 또는 5천만원 이하의 벌금에 처할 수 있고 이를 병과(併科)할 수도 있습니다.

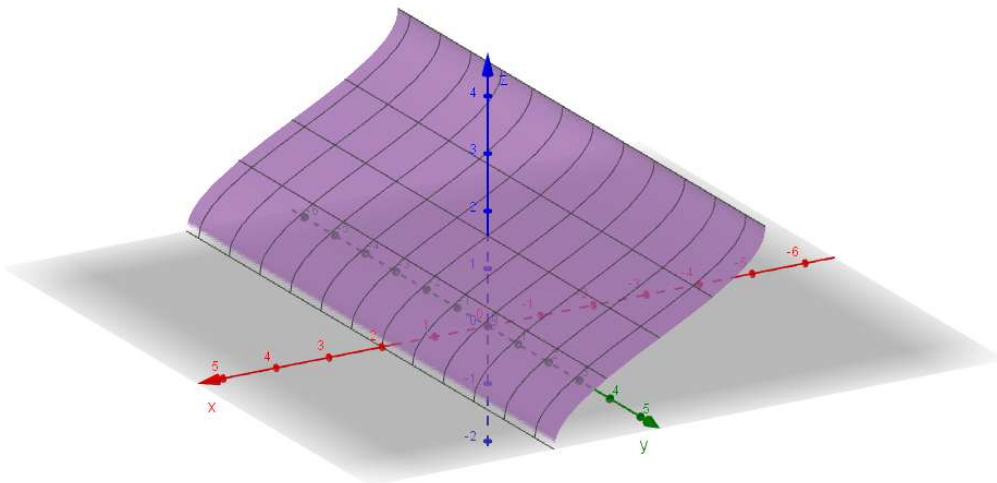
## CHAPTER 10 벡터 미적분

### [10.1 벡터함수]

1.  $\mathbf{r}(t) = \langle 2\cos t, 2\sin t, t \rangle$



2.  $\mathbf{r}(t) = \langle 2\cos t, 0, t \rangle$



## CHAPTER 10 벡터 미적분

3.

[연습문제 1]  $\mathbf{r}(t) = \langle 2, 2t, 2\pi + t \rangle$  (평면  $x=2$  위의  $y=2t$ ,  $z=2\pi+t$ 인 직선)

[연습문제 2]  $\mathbf{r}(t) = \langle 2, 0, 2\pi + t \rangle$  (평면  $x=2$  위의  $z=2\pi+t$ 인 직선)

4.  $\mathbf{r}(t) = \langle 6t^2 + 1, -6t^{\frac{1}{2}} + 2, 2t + 1 \rangle$

5.  $\sinh \pi$

6.  $\sqrt{3}(e^2 - 1)$

### [10.2 속도, 가속도, 곡률과 가속도의 성분]

|          | 7.                                                                       | 8.                                                                                                       |
|----------|--------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 속도       | $\langle 2, 0, 2t \rangle$                                               | $\langle \cos t - t \sin t, \sin t + t \cos t, 0 \rangle$                                                |
| 가속도      | $\langle 0, 0, 2 \rangle$                                                | $\langle -2 \sin t - t \cos t, 2 \cos t - t \sin t, 0 \rangle$                                           |
| 속력       | $\sqrt{4 + 4t^2}$                                                        | $\sqrt{1 + t^2}$                                                                                         |
| 가속도 접선성분 | $\frac{2t}{\sqrt{1 + t^2}}$                                              | $\frac{t}{\sqrt{1 + t^2}}$                                                                               |
| 가속도 법선성분 | $\frac{2t}{\sqrt{1 + t^2}}$                                              | $\frac{2}{\sqrt{1 + t^2}}$                                                                               |
| 곡률       | $\frac{1}{2\sqrt{1 + t^2}^3}$                                            | $\frac{2}{\sqrt{1 + t^2}^3}$                                                                             |
| 단위법선벡터   | $\langle -\frac{t}{\sqrt{1 + t^2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}} \rangle$ | $\langle -\frac{\sin t + t \cos t}{\sqrt{1 + t^2}}, \frac{\sin t + t \cos t}{\sqrt{1 + t^2}}, 0 \rangle$ |
| 종법선벡터    | $\langle 0, 1, 0 \rangle$                                                | $\langle 0, 0, 1 \rangle$                                                                                |

|          | 9.                                                                                                                   | 10.                                                                                     |
|----------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------|
| 속도       | $\langle -a \sin t, b, a \cos t \rangle$                                                                             | $\langle 0, \cosh t, -\sinh t \rangle$                                                  |
| 가속도      | $\langle -a \cos t, 0, -a \sin t \rangle$                                                                            | $\langle 0, \sinh t, -\cosh t \rangle$                                                  |
| 속력       | $\sqrt{a^2 + b^2}$                                                                                                   | $\sqrt{\cosh 2t}$                                                                       |
| 가속도 접선성분 | 0                                                                                                                    | $\frac{\sinh t}{\sqrt{\cosh t}}$                                                        |
| 가속도 법선성분 | a                                                                                                                    | $\frac{1}{\sqrt{\cosh 2t}}$                                                             |
| 곡률       | $\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$                                                                                         | $\frac{1}{(\cosh 2t)^{3/2}}$                                                            |
| 단위법선벡터   | $\langle -\cos t, 0, -\sin t \rangle$                                                                                | $\langle 0, -\frac{\sinh t}{\sqrt{\cosh 2t}}, -\frac{\cosh t}{\sqrt{\cosh 2t}} \rangle$ |
| 종법선벡터    | $\langle \frac{-b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin t, \frac{-a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos t \rangle$ | $z \langle -1, 0, 0 \rangle$                                                            |

CHAPTER 10 벡터 미적분

|          | 11.                                                             | 12.                                                                     |
|----------|-----------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------|
| 속도       | $\langle \frac{1}{t}, \frac{1}{t}, \frac{2}{t} \rangle$         | $\langle \frac{1}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}, 0 \rangle$                  |
| 가속도      | $\langle \frac{1}{t^2}, -\frac{1}{t^2}, -\frac{2}{t^2} \rangle$ | $\langle \frac{-2t}{(1+t^2)^2}, \frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2}, 0 \rangle$  |
| 속력       | $\frac{\sqrt{6}}{t}$                                            | $\frac{\sqrt{1+4t^2}}{1+t^2}$                                           |
| 가속도 접선성분 | $-\frac{\sqrt{6}}{t^2}$                                         | $\frac{2t(1-2t^2)}{(1+t^2)^2 \sqrt{1+4t^2}}$                            |
| 가속도 법선성분 | 0                                                               | $\frac{2}{(1+t^2) \sqrt{1+4t^2}}$                                       |
| 곡률       | 0                                                               | $\frac{2}{\sqrt{1+t^2} (1+4t^2)^{3/2}}$                                 |
| 단위법선벡터   |                                                                 | $\langle \frac{-2t}{\sqrt{1+4t^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}, 0 \rangle$ |
| 종법선벡터    |                                                                 | $\langle 0, 0, 1 \rangle$                                               |

[10.3 방향도함수]

13.

(1) 주어진 벡터 방향으로의 방향도함수 :  $-\frac{33}{125}$

(2) 함수가 가장 크게 증가하는 방향 :  $\langle \frac{-3}{25}, \frac{-6}{25} \rangle$

그때의 증가율 :  $\frac{3\sqrt{5}}{25}$

14.

(1) 주어진 벡터 방향으로의 방향도함수 :  $\frac{4}{\sqrt{10}}$

(2) 함수가 가장 크게 증가하는 방향 :  $\langle \frac{1}{2\sqrt{10}}, \frac{6}{\sqrt{10}}, -\frac{4}{\sqrt{10}} \rangle$

그때의 증가율 :  $\sqrt{\frac{209}{40}}$

15.

(1) 주어진 벡터 방향으로의 방향도함수 :  $\frac{7}{\sqrt{6}}$

(2) 함수가 가장 크게 증가하는 방향 :  $\langle 2, -3, 6 \rangle$

그때의 증가율 : 7

## CHAPTER 10 벡터 미적분

16. 접평면 방정식  $x - y + \sqrt{2}z = 4$

법선의 방정식  $x - 1 = 2t, y + 1 = -2t, z - \sqrt{2} = 2\sqrt{2}t$

17. 접평면의 방정식  $2\sqrt{3}x - 2y - z = \sqrt{3}\pi - 1$

법선의 방정식은  $x - \frac{\pi}{12} = 2\sqrt{3}t, y - 2t, z - 1 = -t$

### [10.4 발산과 회전]

|     | 발산                            | 회전                                                            | $\text{div}(\text{curl}\mathbf{F})$ |
|-----|-------------------------------|---------------------------------------------------------------|-------------------------------------|
| 18. | 3                             | $\mathbf{0}$                                                  | 0                                   |
| 19. | $xz \sinh(xyz)$               | $-xy \sinh(xyz)\vec{i} + yz \sinh(xyz)\vec{k}$                | 0                                   |
| 20. | $2x + 2y + 2z$                | $\mathbf{0}$                                                  | 0                                   |
| 21. | $\sinh x + xz \cosh(xyz) - 1$ | $(-1 - xy \cosh(xyz))\vec{i} + \vec{j} + yz \cos(xyz)\vec{k}$ | 0                                   |
| 22. | $-e^{-x} + e^x + \cosh x$     | $-z \sinh x \vec{i} + ye^x \vec{k}$                           | 0                                   |

23. 증명 생략

### [10.5 선적분]

24.  $\frac{\sqrt{2}}{6} - \frac{1}{3} + \frac{\pi^3}{24}$

25. 1

26.  $\frac{1}{3}$

27.  $2\pi - 2$

28. 16

29.  $\frac{15}{2}$

CHAPTER 10 벡터 미적분

[10.6 경로에 무관한 선적분]

30.  $\phi = xy^3 - 4y$

31.  $\phi = y \sin(x^2)$

32.  $\phi = \ln(x^2 + y^2)$

33.  $\phi = \cosh(x + y)$

34.  $\frac{1}{2}(e^3 - 1)$

35.  $1 + \frac{e + e^{-1}}{2}$

36.  $\frac{e - e^{-1}}{2}$

37.  $\frac{1}{3}$

38.  $-\frac{3}{2}$

39.  $\frac{e - e^{-1}}{2}$

[10.7 중적분]

40.  $\frac{32\sqrt{2}}{15}$

41.  $\frac{3}{56}$

42.  $\frac{a^3 b \pi}{4}$

43.  $2\pi(5\sqrt{15} - 8\sqrt{3})$

CHAPTER 10 벡터 미적분

44.  $\frac{\pi}{2}(a^2 - \ln(1 + a^2))$

45.  $\frac{7\pi}{8}$

46.  $\frac{16}{3}$

47.  $4k\pi$  ( $k$ 는 실수)

48.  $\frac{2\pi}{3}(27 - 16\sqrt{2})$

49.  $\frac{8\pi(2 - \sqrt{2})}{3}$

[10.8 그린 정리]

50.  $\frac{1}{12} + \frac{1}{2}e - \frac{1}{4}e^4 + \frac{1}{3}e^3$

51.  $e^{-1} + \frac{1}{2}$

52.  $4\pi$

53. 0

54.  $16(2\pi - 1)$

[10.9 면적분]

55.  $10\sqrt{14}$

56.  $\frac{1}{2}\pi^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \ln(\sqrt{2} + 1)\right)$

CHAPTER 10 벡터 미적분

57.  $\frac{375\sqrt{14}}{2}$

58.  $2604\sqrt{2}\pi$

59.  $\frac{128}{3}$

[10.10 발산정리]

60.  $32\pi$

61.  $72\pi$

62.  $-4\pi(b-a)$

63. 0

64.  $\frac{496}{5}\pi$

[10.11 스톡스 정리]

65. 0

66. 0

67.  $-2e^{-1}$

68. 0

69.  $2\pi$